О. А. Копп (Казань)

ОПЕРАДЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ

Будут использоваться определения и обозначения из [1]. Обозначим через $\mathbf{L}$ категорию, объекты которой — семейства $P = \{P(n)|n = 1, 2, \ldots\}$, в которых $P(n)$ — левые $K\Sigma_n$-модули. Моноиды в моноидальной категории $\mathbf{L}$ называются операдами. Для операд R и D рассмотрим категории левых, правых и двухсторонних объектов над ними: ${}_R\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_D$, ${}_R\mathbf{L}_D$. Для $P, Q \in {}_R\mathbf{L}$ определен ${}_R[P, Q] \in \mathbf{L}$, такой, что для любого $X \in \mathbf{L}$ имеется естественный изоморфизм: ${}_R\mathbf{L}(P \odot X, Q) \cong \mathbf{L}(X, {}_R[P, Q])$. ${}_R[P, P]$ является моноидом в $\mathbf{L}$, то есть операдой. Напомним ([1]), что $[P, Q](m) = \prod\limits_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_m}(\widetilde{P}(n, m), Q(n))$. Пусть R — операда, $P, Q \in {}_R\mathbf{L}$, тогда ${}_R[P, Q](m) \subseteq \prod\limits_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_m}(\widetilde{P}(n, m), Q(n))$ состоит из всех тех $\varphi = (\varphi_n)_{n \geq m}, \varphi_n : \widetilde{P}(n, m) \to Q(n)$, которые обладают следующим свойством. Представим φ_n как семейство $\varphi_{n,\alpha} : P(n_1) \otimes \ldots \otimes P(n_m) \to Q(n)$, где $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$, $n_1 + \ldots + n_m = n$. Тогда, если $\overline{r}_i p_i \in P(n_i), \overline{r}_i = r_{1,i} \ldots r_{k_i,i}$, $r_{j,i} \in R(d_{ji})$, $d_{1i} + \ldots + d_{k_i i} = n_i$, $p_i \in P(k_i)$, $1 \leq i \leq m$, то $(\overline{r}_1 p_1) \ldots (\overline{r}_m p_m)\varphi_{n,\alpha} = (\overline{r}_1 \ldots \overline{r}_m)(p_1 \ldots p_m \varphi_{l,\beta})$, где $l = k_1 + \ldots + k_m$, $\beta = (k_1, \ldots, k_m)$. $D = {}_R[P, P]$ является подоперадой $[P, P]$, ${}_R[P, R] \in {}_D L_R$, $P \in {}_R L_D$.

Пусть $F \in {}_R\mathbf{L}$, $F(n) = R(n) \otimes_K KX$, где KX — свободный модуль с базисом X над коммутативным кольцом K.

Теорема 1. *$({}_R P_D, {}_R Q_D)$ есть Морита-контекст в смысле [1]. Функторы $\odot_R P$ $(\bigcirc_R P), \odot_D Q$ $(\bigcirc_D Q)$ образуют эквивалентность категорий $\mathbf{L}_R$ и $\mathbf{L}_D$ $(Alg(R)$ и $Alg(D))$ тогда и только тогда, когда P есть ретракт F (с конечным X) и R есть ретракт копроизведения конечного числа экземпляров P.*

Теорема 2. *Имеет место изоморфизм линейных операд: ${}_R[F, F] \cong M(X, R)$, где $M(X, R)$ — матричная операда, введенная в [2].*

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00469).

ЛИТЕРАТУРА

1. Копп О. А., Тронин С. Н. *Морита-эквивалентные линейные операды*// Настоящий сборник. - С . 117–119.

2. Тронин С. Н., Копп О. А. *Матричные линейные операды*// Изв. вузов. Математика. - 2000. - No. 6. - С. 53–62.

О. А. Копп, С. Н. Тронин (Казань)

МОРИТА-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАДЫ

Пусть $\mathbf{S}$ обозначает категорию, объекты которой — семейства $A = \{A(n,m) \mid n,m = 1,2,\ldots\}$, причем $A(n,m)$ есть $K\Sigma_n$-$K\Sigma_m$-бимодуль, K — коммутативное ассоциативное кольцо, Σ_r – группа подстановок r-й степени, а морфизмы $\mathbf{S}$ — семейства бимодульных гомоморфизмов. Известно, что $\mathbf{S}$ есть моноидальная замкнутая категория с тензорным произведением $(A \otimes B)(n,m) = \bigoplus_{r=1}^{\infty} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} B(r,m)$. Пусть $\overline{\mathbf{S}}$ есть подкатегория $\mathbf{S}$, состоящая из биградуированных ассоциативных колец (без единицы) и кольцевых гомоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{L}$ категорию, объекты которой — семейства $P = \{P(n) | n = 1,2,\ldots\}$, в которых $P(n)$ — левые $K\Sigma_n$-модули. Образуем функтор $\otimes : \mathbf{S} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, $(A \otimes P)(n) = \bigoplus_{r=1}^{\infty} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} P(r)$. Рассмотрим функтор $\widetilde{(\ )} : \mathbf{L} \to \mathbf{S}$ (фактически даже в $\overline{\mathbf{S}}$): $\widetilde{P}(n,m) = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{n_1+\ldots+n_m=n} K\Sigma_n \otimes_C (P(n_1) \otimes_K \ldots \otimes_K P(n_m))$, где $C = K\Sigma_{n_1} \otimes \ldots \otimes K\Sigma_{n_m}$. Определим "тензорное произведение" в $\mathbf{L}$ по формуле $P \odot Q = \widetilde{P} \otimes Q$.

Теорема 1. *Тензорное умножение $\odot$ превращает $\mathbf{L}$ в моноидальную замкнутую категорию. Точнее, $\mathbf{L}(P \odot Q, V) \cong \mathbf{L}(Q, [P,V])$, где $[P,V](m) = \prod_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_n}(\widetilde{P}(n,m), V(n))$. Функтор $\widetilde{(\ )}$ при этом становится моноидальным, $\widetilde{P \odot Q} \cong \widetilde{P} \otimes \widetilde{Q}$. Как функтор в $\overline{\mathbf{S}}$, он обладает правым сопряженным: $\overline{\mathbf{S}}(\widetilde{P}, A) \cong \mathbf{L}(P, A_0)$. Здесь $A_0(n) = A(n,1)$.*